Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Логические символы



Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого



Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$



Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x



Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует



Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$



Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного



Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно, тогда, то



Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно, тогда, то

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$



Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно, тогда, то

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

4. $\Leftrightarrow$ - равносильно, эквивалентно, тогда и только тогда



Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

$\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

$\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно, тогда, то

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

4. $\Leftrightarrow$ - равносильно, эквивалентно, тогда и только тогда

$x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$



Логические символы

5. $\in$ - принадлежит



Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$



Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A



Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$



Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено



Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

$A \subset B$



Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

$A \subset B$ - множество A включено в множество B,



Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

$A \subset B$ - множество A включено в множество B,т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B



Логические символы

5. $\in$ - принадлежит

$x \in A$ - число x принадлежит множеству A

$1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

$A \subset B$ - множество A включено в множество B,т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B

$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$



Множества чисел



Множества чисел

$$N = \{1, 2, ...\}$$



Множества чисел

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел



Множества чисел

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$



Множества чисел

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел



Множества чисел

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел

Q - множество рациональных чисел.



Множества чисел

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел

Q - множество рациональных чисел.

Рациональное число - это число, которое можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m и n - целые числа. Пример: $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$



Множества чисел

I - множество иррациональных чисел.



Множества чисел

I - множество иррациональных чисел.

Иррациональное число - это число, которое не является рациональным. Пример: $\sqrt{2}$, π.



Множества чисел

I - множество иррациональных чисел.

Иррациональное число - это число, которое не является рациональным. Пример: $\sqrt{2}$, π.

R - множество действительных чисел



Множества чисел

I - множество иррациональных чисел.

Иррациональное число - это число, которое не является рациональным. Пример: $\sqrt{2}$, π.

R - множество действительных чисел - это множество всех рациональных и иррациональных чисел



Прямая и обратная теоремы



Прямая и обратная теоремы

Определение

Математические утверждения, в правильности которых убеждаются путем рассуждений или доказательств, называются **теоремами**.



Прямая и обратная теоремы

Каждая теорема состоит из двух частей: из условия и заключения.



Прямая и обратная теоремы

Каждая теорема состоит из двух частей: из условия и заключения. Условие — это то, что дано;



Прямая и обратная теоремы

Каждая теорема состоит из двух частей: из условия и заключения. Условие — это то, что дано; заключение — это то, что надо доказать.



Прямая и обратная теоремы

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием,



Прямая и обратная теоремы

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**,



Прямая и обратная теоремы

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**, получившаяся - **обратной**,



Прямая и обратная теоремы

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**, получившаяся - **обратной**, а обе теоремы вместе - **взаимно обратными**.



Прямая и обратная теоремы

Пусть X и Y - некоторые утверждения.



Прямая и обратная теоремы

Пусть X и Y - некоторые утверждения. Тогда



Прямая и обратная теоремы

Пусть X и Y - некоторые утверждения. Тогда $X \Rightarrow Y$ - прямая теорема,



Прямая и обратная теоремы

Пусть X и Y - некоторые утверждения. Тогда

$X \Rightarrow Y$ - прямая теорема,

$Y \Rightarrow X$ - обратная теорема.



Необходимое и достаточное условия



Необходимое и достаточное условия

Определение

Необходимым условием называется условие, без соблюдения которого данное утверждение не может быть истинным.



Необходимое и достаточное условия

Определение

Достаточным условием называется такое условие, при выполнении которого данное утверждение является истинным.



Необходимое и достаточное условия

Пусть дано математическое выражение $X \Rightarrow Y$.



Необходимое и достаточное условия

Пусть дано математическое выражение $X \Rightarrow Y$. Тогда Y является необходимым условием для X,



Необходимое и достаточное условия

Пусть дано математическое выражение $X \Rightarrow Y$. Тогда Y является необходимым условием для X, а X является достаточным условием для Y.



Необходимое и достаточное условия

Пример:



Необходимое и достаточное условия

Пример: $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.



Необходимое и достаточное условия

Пример: $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.

Здесь выполнение условия $x = 2$ является достаточным для истинности равенства $x^2 = 4$,



Необходимое и достаточное условия

Пример: $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.

Здесь выполнение условия $x = 2$ является достаточным для истинности равенства $x^2 = 4$, а выполнение условия $x^2 = 4$ является лишь необходимым для справедливости равенства $x = 2$.



Расширенное множество действительных чисел



Расширенное множество действительных чисел

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$.



Расширенное множество действительных чисел

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$.Полученное множество называется **расширенным множеством действительных чисел** и обозначается $\overline{R}$.



Расширенное множество действительных чисел

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$.Полученное множество называется **расширенным множеством действительных чисел** и обозначается $\overline{R}$.

$a \in \overline{R} \rightarrow a$ - конечное число, $+\infty$ или $-\infty$.



Расширенное множество действительных чисел

Определение

Элементы $+\infty$ и $-\infty$ называются **бесконечными числами**.



Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел



Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$



Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$



Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$
2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$



Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$
2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
4) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$



Расширенное множество действительных чисел

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$
2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
4) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
5) $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$



Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства



Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$



Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

2) $a + (+\infty) = +\infty$



Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$
2) $a + (+\infty) = +\infty$
3) $a + (-\infty) = -\infty$



Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

2) $a + (+\infty) = +\infty$

3) $a + (-\infty) = -\infty$

4) если $a > 0$, то

$a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$



Расширенное множество действительных чисел

Для конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$

2) $a + (+\infty) = +\infty$

3) $a + (-\infty) = -\infty$

4) если $a > 0$, то

$a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$

5) если $a < 0$, то

$a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$



Расширенное множество действительных чисел

Выражения

$$(+\infty) + (-\infty),\ (+\infty) - (+\infty),$$



Расширенное множество действительных чисел

Выражения

$$(+\infty)+(-\infty),\ (+\infty)-(+\infty),$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ (\pm\infty)\cdot 0,\ 1^{\pm\infty}$$



Расширенное множество действительных чисел

Выражения

$$(+\infty)+(-\infty),\ (+\infty)-(+\infty),$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ (\pm\infty)\cdot 0,\ 1^{\pm\infty}$$

неопределены и называются

неопределенностями.



Расширенное множество действительных чисел

Выражения

$$(+\infty)+(-\infty),\ (+\infty)-(+\infty),$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ (\pm\infty)\cdot 0,\ 1^{\pm\infty}$$

неопределены и называются **неопределенностями**.

Если знак бесконечного числа неизвестен, то это число называется **бесконечностью без знака** и обозначается ∞.



Промежутки



Промежутки

1) Отрезок



Промежутки

1) Отрезок
$[a, b]$



Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$



Промежутки

1) Отрезок
$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$



Промежутки

1) Отрезок
$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$
2) Интервал



Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

(a, b)



Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$



Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

3) Полуинтервал



Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

3) Полуинтервал

$[a, b)$



Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

3) Полуинтервал

$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$



Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

3) Полуинтервал

$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

$(a, b]$



Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

3) Полуинтервал

$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$



Свойства числовых множеств



Свойства числовых множеств

Промежутки - частный случай числового множества, т.е. множества, содержащего некоторый набор чисел.



Свойства числовых множеств

Промежутки - частный случай числового множества, т.е. множества, содержащего некоторый набор чисел.

Примеры:



Свойства числовых множеств

Промежутки - частный случай числового множества, т.е. множества, содержащего некоторый набор чисел.

Примеры:

$[1, 3]$ - отрезок,



Свойства числовых множеств

Промежутки - частный случай числового множества, т.е. множества, содержащего некоторый набор чисел.

Примеры:

$[1, 3]$ - отрезок,

$(1, 4)$ - интервал,



Свойства числовых множеств

Промежутки - частный случай числового множества, т.е. множества, содержащего некоторый набор чисел.

Примеры:

$[1, 3]$ - отрезок,

$(1, 4)$ - интервал,

$\{1, 3, 5\}$ - числовое множество с элементами 1, 3, 5.



Свойства числовых множеств

Определение

Числовое множество E называется **ограниченным сверху (снизу)**, если

$$\exists b \in R \quad \forall x \in E\colon x \leq b \ (x \geq b).$$



Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:



Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что



Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E



Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E : - выполняется



Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E : - выполняется

$x \leq b$ - x меньше или равен b



Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E : - выполняется

$x \leq b$ - x меньше или равен b

$x \geq b$ - x больше или равен b



Свойства числовых множеств

Определение

Числовое множество E называется **ограниченным сверху (снизу)**, если

$$\forall b \in R \quad \exists x \in E\colon x > b \ (x < b)$$



Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:



Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b



Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

$\exists x \in E$ - существуе такое число x из множества E, что



Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

$\exists x \in E$ - существуе такое число x из множества E, что

: - выполняется



Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

$\exists x \in E$ - существуе такое число x из множества E, что

: - выполняется

$x > b$ - x больше b



Свойства числовых множеств

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

$\exists x \in E$ - существуе такое число x из множества E, что

: - выполняется

$x > b$ - x больше b

$x < b$ - x меньше b



Определение

Множество E называется **ограниченным**, если $\exists b > 0\ \forall x \in E\colon |x| \leq b$



Свойства числовых множеств

Определение

Множество E называется **ограниченным**, если $\exists b > 0\ \forall x \in E$: $|x| \leq b$

Примеры:



Свойства числовых множеств

Определение

Множество E называется **ограниченным**, если $\exists b > 0 \; \forall x \in E$: $|x| \leq b$

Примеры:

1. $(-\infty, 3]$ - числовое множество, ограниченое сверху, но неограниченое снизу.



Свойства числовых множеств

Определение

Множество E называется **ограниченным**, если $\exists b > 0 \; \forall x \in E$: $|x| \leq b$

Примеры:

1. $(-\infty, 3]$ - числовое множество, ограниченое сверху, но неограниченое снизу.
2. $[-3, 2]$ - ограниченное множество.



Свойства числовых множеств

Определение

Наименьшее из всех чисел, ограничивающих множество E сверху, называется его **точной верхней гранью** и обозначается $supE$ (читается "супремум E").



Свойства числовых множеств

Определение

Наибольшее среди всех чисел, ограничивающих множество E снизу, называется его **точной нижней гранью** и обозначается $\inf E$ (читается "инфимум E").



Свойства числовых множеств

Примеры:

$sup[-3,2] = 2$

$inf\,[-3,2] = -3$

$sup(-3,2) = 2$

$inf\,(-3,2) = -3$

